246 – Séries de Fourier, exemples et applications

L'idée des séries de Fourier est d'approcher des fonctions périodiques par des polynômes trigonométriques. Ici, on va considérer des fonctions de R dans C 2π périodiques ; on peut toujours se ramener à ce cas à partir d'une fonction t-périodiques. Le cas 2π périodique est pratique car les fonctions cosinus et sinus sont 2π périodiques, et de ce fait, les notations sont moins lourdes.

On ne travaille qu'avec des fonctions 2-Pi périodiques, toutes L².

I) Introduction

Intro : passer d'une fonction T périod à une fonction 2Pi périod [MTW 512]

But : approcher une fonction L² 2Pi périodique par des polynômes trigonométriques.

1) Approche géométrique [MTW] + [ZQ]

Déf : ensemble L^p de fonctions 2-Pi-périodiques. Rq : par Hölder, {fcts continues} C {fonctions continues par morceau} C L^infini C L² C L^1 [ZQ 69] *(l'intégrale ne porte que sur 0-2Pi)*

Déf : e_k(x)=exp(ikx) et Pn=Vect(e_k,k<n). Pn est l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur à n. On définit un produit scalaire sur L². Il se trouve que (e_k) est une b.o.n de Pn. Pn est un sev de DF dans L² complet, donc on peut projeter sur L². La projection est donnée par sum((f,e_n)en). On pose cn(f)=«formule ». On note Sn(f)=sum(ck(f)ek). Sn(f) est donc le polynôme trigonométrique de meilleure approximation [MTW 512]

Prop : inégalité de Bessel [MTW 515]

Cor : (Riemann Lebesgue) les cn(f) tendent vers 0 [MTW 516]

2) Coefficients et série de Fourier [MTW] + [ZQ]

Déf : an(f), bn(f) [MTW 516]

Remarques : nullité de certains coeff si f paire/impaire

Prop : l'application qui a une fonction f de L^1 associe ses coeff de Fourier est un morphisme d'algèbre de (L^1,+,*) dans (c_0,+,.) (produit de convolution et produit de Cauchy), de norme 1. En particulier, il est injectif [ZQ73]

Prop : propriétés sur les coeff de Fourier [ZQ 72]

Sn(f) converge t-elle ? Si oui, pour quelle norme ? Quel rapport la limite éventuelle a-t-elle avec f ? [ZQ 75]

II) Convergence des séries de Fourier

C-ex : il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en certains points [ZQ 82]

1) Théorème de Fejér [ZQ] + [Gou]

Déf : Sn, Cn, Sñ, Cñ, relations etc [Gou 287]

Th de Fejer : si f est continue, Cn cv uniformément vers f [Gou 286] *(se base sur du produit de convolution)*

Cor : l'ensemble des poly trigo est dense dans l'ensemble des fct continues périodiques [ZQ 86]

2) Aspect hilbertien [ZQ] + [BMP] + [MTW]

Prop : (e_n) est une base hilbertienne de L^2 [ZQ 85 point 4] *(orthonormal : OK. Densité : (e_k) dense dans C et C dense dans L²)*

Corollaire : Parseval, et toutes les égalités obtenues en regardant [BMP 108]. En particulier, Sn(f) cv vers f pour la norme 2.

Corollaire : (cn(f)) est la suite nulle ssi f=0. f->(cn(f)) est une isométrie injective de L² dans l² [MTW 522]

3) <u>Convergence normale et ponctuelle</u> [MTW]

Prop : soit (c_n) une suite tq sum(|cn|) cv. On note f=sum(c_n.e_n). Alors f est somme de sa série de Fourier et la cv est uniforme [MTW 523] *(c'est clair que Sn(f) cv normalement, et en intégrant terme à terme on trouve c_n(f)=c_n) donc c'est bon)*

Th : si f est continue et que sa série de Fourier converge normalement, alors f est somme de sa série de Fourier [MTW 523] *(vient de la prop précédente)*

Th : si f est C^1pm et C alors la série de Fourier de f est normalement convergente et f est somme de sa SF [MTW 524] *(c_n(f')=inc_n(f), et Bessel nous dit que la somme des |cn(f')| cv, dc la série des |n²c_n(f)| cv, on en déduit que la série des |cn(f)| cv)*

Th (Dirichlet) : si f est continue par morceaux, et admet une dérivée à droite et à gauche en tout point, alors la SF de f cv simplement et sa somme est… [MTW 525] *(on utilise que Sn=f*Dn, on utilise Riemann Lebesgue)*

III) <u>Applications</u>

1) <u>Calculs de sommes</u>

[Gou 261 exo 1]

2) Calculs d'intégrales

[FGN Analyse 2 p.282]

3) <u>Résolution d'EDO et EDP</u>

MTW 59 exo 12.8, on développe en SF une fonction

Equation de la chaleur [ZQ 105] *(origine des séries de Fourier. Idée : on cherche une solution avec variables séparées, u(x,t)=f(x)g(t). On injecte et on trouve une équation simple qui impose que f''/f=g'/g=k constante. On résout les équa diff. On trouve une solution. Une somme infinie de telles solutions reste solution. Les conditions au bord impliquent que les coeff constants devant ces solutions élémentaires sont les coeff de Fourier de la fonction au bord)*

4) <u>Des inégalités</u>

Inegalité de Wirtinger

Th : formule de Green Riemann et corollaire sur l'aire [MTW 655]

Inegalité isopérimétrique [ZQ 103] *(nécessite la formule de Green Riemann et Parseval généralisé)*

<u>Développements :</u>
1 -Fejér [Gou An 286] (***)
2 - Inégalité de Wirtinger + inégalité isopérimétrique [Analyse L2 529] (**)

<u>Bibliographie :</u>
[MTW]

[ZQ]
[Gou]
[BMP]
[FGN Analyse 2]

Rapports 2005 à 2009 : Les différents types de convergence (L2, Fejer, Dirichlet etc...) doivent être connus. Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe C1 par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Dans le cas d'une fonction continue et C1 par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet. Cette leçon ne doit pas se réduire à un cours abstrait sur les coefficients de Fourier.

Pas mis :
Calcul des sommes de Gauss (loi de réciprocité) [ZQ 93
Formule sommatoire de Poisson +appl exo 13 ZQ

Commentaires :

- *J'ai eu beaucoup de mal organiser la partie II sur les convergences. Il faut être très prudent, tous les livres n'ont pas la même approche. Je pense que le découpage en trois sous parties s'impose. Le dernier théorème de la partie II, qui dit que si une fonction est C^1pm et continue, alors sa série de Fourier converge uniformément, rentre bien dans la partie « convergence ponctuelle et uniforme », mais attention, il nécessite Parseval, et Parseval se place obligatoirement dans la partie « Aspect hilbertien », et se déduit du théorème de Fejer, qui est dans la partie « convergence au sens de Cesaro ». C'est pour ceci qu'on ne peut pas agencer les parties dans n'importe quel ordre.*
- *Il y a en fait deux approches possibles pour cette leçon. La première (celle que j'ai choisie) est de montrer Fejer, en déduire que (e_k) est une base hilbertienne de L^2, puis on peut en déduire Dirichlet et compagnie. La seconde méthode est de montrer que (e_k) est dense dans C par Weirstrass trigo. Comme C est dense dans L^2, on a tout de suite la convergence quadratique, Parseval etc. On en déduit Dirichlet et compagnie.*